

Çarpma Anahları

Halka Teorisi Dersi Vize Soruları

1- Aşağıdaki kavramları açıklayınız.

Halka homomorfizmasının çekirdeği, ideal, R halkasının ideallerinin dilesinin sonlu toplamı, R halkasının ideallerinin sonlu dilesinin i_4 direkt toplamı.

2- $f: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$

$\bar{a} \rightarrow f(\bar{a}) = 4\bar{a}$ ile tanımlanan f dönüşümünün homomorfizma (halka) olduğunu gösterip çekirdeğini bulunuz.

3- $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \Delta y = x + y + 1$, $x \circ y = xy + x + y$ işlemleriyle $(\mathbb{Z}, \Delta, \circ)$ üslüsü bir halkadır. a) birimlidir? b) değişmeli midir? c) sıfır bölensiz midir?

4- $\{A_i \mid i \in I\}$ R halkasının ideallerinin bir ailesi ve $I = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $a_i \in A_i, i \in I$ olmak üzere $a_1 + \dots + a_n = 0$ iken $\forall i \in I, a_i = 0$ oluyorsa her bir $a \in \sum A_i, i \in I$ için $a = a_1 + \dots + a_n$ şeklinde tek türlü yazılır, gösteriniz.

Basarılar

C-1- Defteriniz de var

C-2- $f: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ $f(\bar{a}) = 4\bar{a}$

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow 9|a-b \Rightarrow a-b=9k \Rightarrow a=b+9k \Rightarrow 4a=4b+36k$$

$$\Rightarrow 4a=4b \Rightarrow 4.\bar{a}=4.\bar{b} \text{ olup iyi tanımlıdır.}$$
$$f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\overline{a+b}) = 4(\overline{a+b}) = \overline{4(a+b)} = \overline{4a+4b} = \overline{4a} + \overline{4b} = 4.\bar{a} + 4.\bar{b} = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$$

$$f(\bar{a}.\bar{b}) = f(\overline{a.b}) = 4(\overline{a.b}) = \overline{4ab} = \overline{16.ab} = \overline{4a.4b} = \overline{4a}.\overline{4b} = f(\bar{a}).f(\bar{b})$$

Çekirdek $f = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ dir.

$$C-3-) a) x \circ y = x \Rightarrow x \circ y = xy + x + y = x \\ \Rightarrow xy = -y \Rightarrow y = 0 \text{ bulunur.}$$

$$b) x \circ y = xy + x + y = yx + y + x = y \circ x$$

c) Önce halkanın sıfırını bulalım $x \Delta y = x$.

$$x \Delta y = x + y + 1 = x \Rightarrow y = -1 \text{ bulunur.}$$

$$x \# y = -1 \Rightarrow xy + x + y = -1$$

$$xy + x + y + 1 = 0 \Rightarrow x(y+1) + (y+1) = 0$$

$$\Rightarrow (y+1)(x+1) = 0 \Rightarrow y+1=0 \vee x+1=0$$

$$\Rightarrow y = -1 \vee x = -1 \text{ olup}$$

Sıfır bölensizdir.

C-4) Defterlerinizde var.